-EXERCICE 28.5-

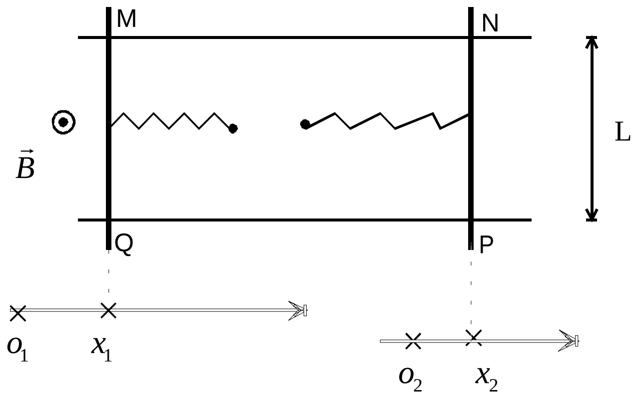
• ENONCE :

« Oscillateurs couplés par un champ magnétique »

On considère 2 rails conducteurs parallèles horizontaux distants de L ; sur ces rails sont posés transversalement 2 barres de même masse m ;la résistance du circuit ainsi formé est notée R.

Les barres sont ramenées vers leur position d'équilibre (notées O_1 et O_2) par des ressorts de raideur k et il n'y a pas de frottements mécaniques.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, l'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme (les phénomènes d'auto-induction seront négligés) :



1) Déterminer les modes propres du système ainsi formé et donner $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans chacun des cas possibles.
2) Quelles conditions initiales faut-il imposer pour obtenir l'un **ou** l'autre des modes propres ? Pour chacun des modes, comparer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

• **CORRIGE** :

« Oscillateurs couplés par un champ magnétique »

1) • **Equation électrique :** Ici, la surface du circuit varie de manière continue ; en orientant le courant i dans le sens **trigonométrique**, de façon à ce que le flux de $\vec{B}$ soit positif (c'est plus facile pour les vérifications de signe par la loi de Lenz), nous pouvons donc écrire :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -B\frac{d[L(O_1O_2 + x_2 - x_1)]}{dt} = -BL(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt})$$

Vérification : si $(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}) \succ 0$, alors la surface du circuit augmente, le flux (>0) augmente, la f.e.m doit donc être **négative** afin de créer un champ d'auto-induction dans le **sens contraire** du précédent (ainsi, son flux négatif compensera l'augmentation du précédent) ; d'où :

$e = BL(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}) = Ri$ (en négligeant l'auto-inductance du circuit, en accord avec l'énoncé)

• **Equations mécaniques :** on applique le P.F.D à la barre repérée par x_1, on le projette sur Ox_1 : $m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + F_1^{Lap}$ (on peut vérifier que pour x_1>0, le ressort est contracté ⇒ il tend à s'allonger ⇒ il exerce sur la barre de « gauche » une force <0) ; calculons F_1^{Lap} :

$\vec{F}_1^{Lap} = \int_M^Q idy\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = -iBL\vec{e}_x = -\frac{B^2L^2}{R}(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})\vec{e}_x$ (on intègre de M à Q, car le sens est trigo).

De même, on aurait : $\vec{F}_2^{Lap} = \int_P^N idy\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = +iBL\vec{e}_x = \frac{B^2L^2}{R}(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})\vec{e}_x$; on a alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &m\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{B^2L^2}{R}\frac{dx_1}{dt} + kx_1 - \frac{B^2L^2}{R}\frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (1) \\ &m\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{B^2L^2}{R}\frac{dx_2}{dt} + kx_1 - \frac{B^2L^2}{R}\frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

• **Résolution :** les grandeurs $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires de solutions particulières appelées « **modes** » du système ; lorsque les termes d'amortissement ou dissipatifs en $\frac{dx}{dt}$ sont nuls, les modes sont purement harmoniques et on peut leur associer des « **pulsations propres** ». Ce n'est pas le cas ici, et l'on pourrait chercher des modes de la forme $\alpha\exp(st)$, où s est à priori complexe.

En fait, pour un système de 2 équations couplées, nous utiliserons la méthode simple et « classique » où l'on pose :

$u = x_1 + x_2$ et: $v = x_1 - x_2$; on fait la somme (1)+(2) pour obtenir :

$m\frac{d^2u}{dt^2} + ku = 0 \Rightarrow u(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$ où : $\boxed{\omega_0^2 = k/m}$

On fait ensuite la différence (1)-(2) : $m\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{2B^2L^2}{R}\frac{dv}{dt}+kv=0$; on retrouve une discussion également « classique » en cherchant des solutions de la forme $v(t)\sim\exp(st)$. L'équation caractéristique sera : $ms^2+\frac{2B^2L^2}{R}s+k=0$.

♦ si $\Delta'=\frac{(BL)^4}{R^2}-km\succ 0$: les racines sont réelles et le régime est **APERIODIQUE** de la forme :

$$\boxed{v(t)=a\exp(s_1t)+b\exp(s_2t)\quad \text{où:}\quad s_1=-\frac{(BL)^2}{mR}+\sqrt{\frac{(BL)^4}{(mR)^2}-\frac{k}{m}}\quad \text{et:}\quad s_2=-\frac{(BL)^2}{mR}-\sqrt{\frac{(BL)^4}{(mR)^2}-\frac{k}{m}}}$$

♦ si $\Delta'=\frac{(BL)^4}{R^2}-km\prec 0$: les racines sont complexes et le régime est **PSEUDO-PERIODIQUE** :

$$\boxed{v(t)=\exp(-\frac{B^2L^2}{mR}t)\times(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)\quad \text{avec:}\quad \Omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{(BL)^4}{kR^2}}}$$ (Ω = **pseudo-pulsation**)

Les solutions seront données par : $\boxed{x_1(t)=\frac{u(t)+v(t)}{2}\quad \text{et:}\quad x_2(t)=\frac{u(t)-v(t)}{2}}$

2) • Si l'on veut n'obtenir que le mode u(t), on constate que : $x_1(t)=x_2(t)\quad\forall t$, en particulier à t=0 ⇒ les conditions initiales sont : $\boxed{x_1(0)=x_2(0)\quad \text{et:}\quad \frac{dx_1}{dt}(0)=\frac{dx_2}{dt}(0)}$; les 2 barres oscillent alors **EN PHASE**, la surface du circuit et donc le flux restent constants ⇒ il n'y a pas de phénomènes d'induction, donc pas de dissipation d'énergie électrique dans la résistance R : il est logique d'obtenir pour ce mode une oscillation harmonique, de pulsation $\omega_0^2=k/m$ purement mécanique (en l'absence de frottements mécaniques).

• En ce qui concerne le mode v(t), on voit que : $x_1(t)=-x_2(t)\quad\forall t$; les conditions initiales seront cette fois : $\boxed{x_1(0)=-x_2(0)\quad \text{et:}\quad \frac{dx_1}{dt}(0)=-\frac{dx_2}{dt}(0)}$; les barres oscillent maintenant **EN OPPOSITION DE PHASE**, et le mouvement (de type apériodique ou pseudo-périodique) finit toujours par s'amortir.

Rq : dans le cas général, on remarque que les termes en v(t) disparaissent au bout de quelques constantes de temps ⇒ les 2 barres finissent par se **SYNCHRONISER** ; au bout du compte, on peut affirmer que ce sont les termes dissipatifs (ici, les pertes joules dues aux courants induits) qui synchronisent les oscillateurs (cette remarque a une portée générale).